Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme und Gauß Algorithmus

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme und Gauß Algorithmus

Übersicht:

- Gleichungssysteme
  - drei Arten
  - Lösungsverhalten
- Gauß Algorithmus

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Übersicht:

- Drei Arten von Gleichungssystemen
  - unterbestimmte
  - quadratische
  - überbestimmte
- Lösungsverhalten

Mathematische Objekte: Matrizen

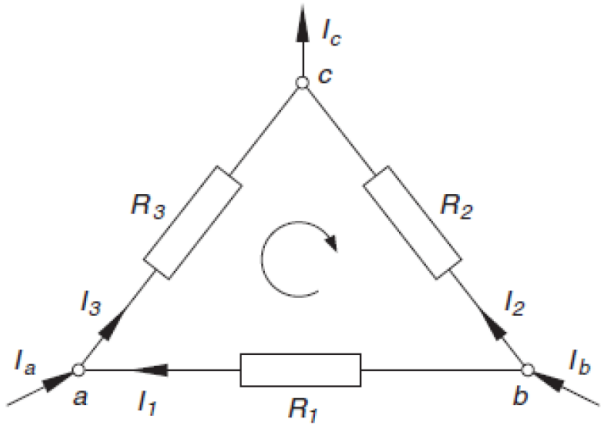
Gleichungssysteme

Anwendungsbeispiel

Bei vielen praktischen Anwendungsproblemen müssen wir Gleichungssysteme aufstellen und lösen.

Beispiel: elektrisches Netz

Wir kennen die Widerstände und die einlaufenden Ströme bei a und b und suchen die restlichen Ströme.



Kirchhoff'sche Regeln

$$I_a + I_1 - I_3 = 0$$
$$I_b - I_1 - I_2 = 0$$
$$-I_c + I_2 + I_3 = 0$$

Knotenregel

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$$

Maschenregel

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Allgemeine Form von Gleichungssystemen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

a_{ij} - Koeffizienten

x_j - Unbekannten

b_j - rechte Seite

Wie immer…

Erst der Zeilenindex dann der Spaltenindex

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Jetzt sind Sie dran...

Wir betrachten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & - & & = & 2 \end{array}$$

1. Welche Koeffizienten a_{ik} sind null?

2. Welchen Wert besitzt der Koeffizient a_{32}?

3. Wie groß ist b_2?

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Drei Arten von Gleichungssystemen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots &\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

m – Gleichungen

n - Unbekannte

Drei Fälle:

$m < n$: unterbestimmtes Gleichungssystem

$m = n$: quadratisches Gleichungssystem

$m > n$: überbestimmtes Gleichungssystem

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

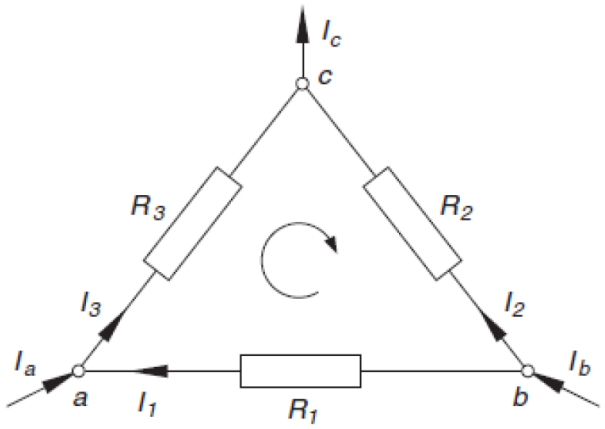
Lösungsverhalten: quadratische Gleichungssysteme

In technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen, wird in der Regel mit quadratischen Gleichungssystemen gearbeitet.

Hier liegen gleich viele Gleichungen (Informationen) wie Unbekannte vor.

Es gibt drei Möglichkeiten für eine Lösung:

- die Lösung ist eindeutig, in diesem Fall ist das System auch für beliebige andere rechte Seiten eindeutig lösbar.



Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Lösungsverhalten: quadratische Gleichungssysteme

In technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen, wird in der Regel mit quadratischen Gleichungssystemen gearbeitet.

Hier liegen gleich viele Gleichungen (Informationen) wie Unbekannte vor.

Es gibt drei Möglichkeiten für eine Lösung:

- die Lösung ist eindeutig, in diesem Fall ist das System auch für beliebige andere rechte Seiten eindeutig lösbar.

- es existiert keine Lösung (hängt von der rechten Seite ab)

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Lösungsverhalten: quadratische Gleichungssysteme

In technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen, wird in der Regel mit quadratischen Gleichungssystemen gearbeitet.

Hier liegen gleich viele Gleichungen (Informationen) wie Unbekannte vor.

Es gibt drei Möglichkeiten für eine Lösung:

- die Lösung ist eindeutig, in diesem Fall ist das System auch für beliebige andere rechte Seiten eindeutig lösbar.

- es existiert keine Lösung (hängt von der rechten Seite ab)

- es existieren unendlich viele Lösungen (hängt von der rechten Seite ab)

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Lösungsverhalten: überbestimmte Gleichungssysteme

Überbestimmte Gleichungssysteme treten z.B. auf, wenn ich eine Messreihe mit vielen Einzelmessungen durchgeführt habe und will jetzt eine Ausgleichskurve durch die Messpunkte bestimmen.

In diesem Fall haben wir wenige Unbekannte aber sehr viele Gleichungen.

Es gibt wieder drei Möglichkeiten für die Lösung:

- die Lösung ist eindeutig (nur im Spezialfall, abhängig von der rechten Seite möglich)

- es gibt unendlich viele Lösungen (ebenfalls Spezialfall, abhängig von der rechten Seite)

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Lösungsverhalten: überbestimmte Gleichungssysteme

Überbestimmte Gleichungssysteme treten z.B. auf, wenn ich eine Messreihe mit vielen Einzelmessungen durchgeführt habe und will jetzt eine Ausgleichskurve durch die Messpunkte bestimmen.

In diesem Fall haben wir wenige Unbekannte aber sehr viele Gleichungen.

Es gibt wieder drei Möglichkeiten für die Lösung:

- die Lösung ist eindeutig (nur im Spezialfall, abhängig von der rechten Seite möglich)

- es gibt unendlich viele Lösungen (ebenfalls Spezialfall, abhängig von der rechten Seite)

- es gibt keine Lösung (Normalfall)

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Lösungsverhalten: unterbestimmte Gleichungssysteme

Bei unterbestimmten Gleichungssystemen liegen zu wenig Informationen (Gleichungen) vor, um die Unbekannten zu bestimmen.

Daher können hier nur zwei mögliche Lösungen auftreten:

- es gibt keine Lösung

- es gibt unendlich viele Lösungen

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Gegeben seien folgende Koeffizienten und Parameter:

$b_2 = -1$ und $b_1 = 0$

$a_{13} = 0, a_{21} = 0, a_{14} = -1$ und $a_{11} = 1$

$a_{23} = 1, a_{12} = 2, a_{24} = 2$ und $a_{22} = 1$.

Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf?

Wieviele Gleichungen und Unbekannte gibt es?

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Übersicht:

- Grundidee und Motivation
- Elementare Umformungen
- Gauß Algorithmus
- Deutung der Ergebnisse

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Grundidee

Wir betrachten ein besonders einfach zu lösendes Gleichungssystem…

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \quad \Leftarrow \quad 2x_1 + 3 + 2 = -1 \quad x_1 = -3 \\
x_2 + x_3 &= 1 \quad \Leftarrow \quad x_2 - 2 = 1 \quad x_2 = 3 \\
-3x_3 &= 6\,. \quad \Leftarrow \quad x_3 = -2
\end{aligned}
$$

Warum ist das Lösen hier so einfach?

Das Gleichungssystem hat eine besondere Form, daher können alle Unbekannten direkt durch Rückwärtseliminieren berechnet werden.

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Grundidee

Wir können jedes Gleichungssystem auf diese Form bringen…

Elementare Zeilenumformungen:

- Vertauschen von zwei Zeilen
- Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich null
- Addieren (Subtrahieren) von zwei Zeilen

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Beispielrechnung: Gauß Algorithmus

Wir wollen das folgende Gleichungssystem lösen…

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 & & \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 & \Big| & - \\
x_1 + x_2 + x_3 = 1 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 & & \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 & \Big| \cdot 2 \Big| & - \\
2x_2 + x_3 = 3 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 & & \\
-3x_3 = -3 & \Updownarrow & \\
2x_2 + x_3 = 3 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
2x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 & \Leftarrow & 2x_1 + 6 + 1 = 5 & x_1 = -1 \\
2x_2 + x_3 = 3 & \Leftarrow & 2x_2 + 1 = 3 & x_2 = 2 \\
-3x_3 = -3 & \Leftarrow & x_3 = 1 &
\end{array}
$$

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Gauß Algorithmus: Deutung der Ergebnisse

Wir wollen ein allgemeines Gleichungssystem lösen und erhalten nach p<n Schritten die folgende Stufenform…

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}^{(1)}x_1 & + & a_{21}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}^{(1)}x_p & + & a_{1,p+1}^{(1)}x_{p+1} & + & \cdots & + & a_{1n}^{(1)}x_n & = & b_1^{(1)} \\
 & & a_{22}^{(2)}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}^{(2)}x_p & + & a_{2,p+1}^{(2)}x_{p+1} & + & \cdots & + & a_{2n}^{(2)}x_n & = & b_2^{(2)} \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{pp}^{(p)}x_p & + & a_{p,p+1}^{(p)}x_{p+1} & + & \cdots & + & a_{p,n}^{(p)}x_n & = & b_p^{(p)} \\
 & & & & & & 0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & = & b_{p+1}^{(p)} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & 0 & + & \cdots & + & \cdots & + & 0 & = & b_n^{(p)}
\end{array}
$$

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Gauß Algorithmus: Deutung der Ergebnisse

Wir betrachten drei Beispiele…

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + \quad x_3 &= 5 \\ 2x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ -3x_3 &= 3 \end{aligned}$$



eine, eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + \quad x_3 &= 5 \\ 2x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$



keine Lösung

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + \quad x_3 &= 5 \\ 2x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$



unendlich viele Lösungen

Mathematische Objekte: Matrizen

Gleichungssysteme: Gauß Algorithmus

Gauß Algorithmus: Deutung der Ergebnisse

Wie bestimme ich die unendlich vielen Lösungen?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + \quad x_3 &= 5 \\ 2x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ 0 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Wir setzen $x_3 = \lambda$…

Gleichung zwei: $2x_2 + \lambda = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda$

Gleichung eins: $2x_1 + 6\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda\right) + \lambda = 5 \Rightarrow x_1 = -2 + \lambda$

Vektornotation: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ {}^3/_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -{}^1/_2 \\ 1 \end{pmatrix}$